

Publikation von Carl Friedrich Gauß aus dem Jahr 1809 in
„Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1812“

Herausgeber J. E. Bode, Berlin.

Fotokopien aus Beständen der Bayrischen Staatsbibliothek München

Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne
die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, nebst
astr. Beobachtungen, vom Herrn Professor
Gauß in Göttingen.

Aus dem lateinischen übersetzt vom Hrn. Prof. *Harding* daselbst,
und unterm 29. May 1809 eingesandt.

Bekanntlich pflegen reisende Astronomen zu geographi-
schen Ortsbestimmungen sich gewöhnlich der Sonnenbeob-
achtung.

achtungen zu bedienen, und aus correspondirenden Höhen derselben die Zeit, so wie aus ihren Höhen im oder nahe beim Meridian die Polhöhe zu bestimmen. In der That empfehlen sich diese Beobachtungen von mehrern Seiten, vorzüglich wenn man sich eines Spiegelsextanten zu den Höhenmessungen bedient, da sich mit demselben die Höhen der Sonne viel schärfer als die der Sterne messen lassen, und die Ablesung vom Limbus bei Tage leichter, als bei Nacht ist; auch ist die Berechnung der Sonnenhöhen im und nahe beim Meridian so einfach, daß sie selbst dem nicht schwierig seyn kann, der auch nur wenige mathematische Kenntnisse besitzt. Selbst wenn ungünstige Witterung nicht gestattet, correspond. Sonnenhöhen zu erhalten, so läßt sich der Stand der Uhr durch Combination der vom Mittage entlegenen Höhen, und auch die Polhöhe mittelst indirecter Methoden, z. B. der Douwes'schen, leicht herleiten.

Bei allen diesen entschiedenen Vorzügen der Beobachtungen würde man doch Unrecht haben, wenn man die Sternhöhen ganz vernachlässigen wollte. Sehr oft heitert sich der Himmel bei einbrechender Nacht erst auf, oder verstattet doch wenigstens auf kurze Zeit, Sternhöhen zu messen; oft erlaubt auch die Zeit dem Reisenden nicht, sich bei Tage aufzuhalten, und er würde sich daher um die Geographie schon verdient machen können, wenn er die Lage des Orts, wo er übernachtet, aus Sternbeobachtungen zu bestimmen die erforderliche Fertigkeit besäße. Nimmt man hiezu noch die Unsicherheit der Beobachtungen, die der niedrige Stand der Sonne zur Winterzeit unvermeidlich macht, so wie die Unbequemlichkeit, die der Beobachter durch das Andrängen neugieriger Zuschauer oder durch die Erschütterungen seines künstlichen Horizonts von vorüberfahrenden Wagen erfährt, welches alles bei stiller Nacht größtentheils wegfällt, so wird man den Sternbeobachtungen immer einen nicht unbedeutenden Werth zugestehen müssen.

Vorzüglich empfehlen sich diese Beobachtungen auch den Seefahrern, denen es von der äußersten Wichtigkeit für

für die Erhaltung ihres Schiffes und oft ihres Lebens selbst ist, den Ort des Schiffes wo möglich alle Tage auszumitteln. Zwar hat es auf dem Meere immer einige Schwierigkeit, den wahren Horizont bei dunkler Nacht mit erforderlicher Genauigkeit zu erkennen: allein ein Fernrohr mit starker Oeffnung, das man an den Sext. anbringen kann, wird diesem Hindernisse leicht abhelfen.

2.

Ein anderer sehr wesentlicher Vortheil dieser Methode besteht darin, daß sich innerhalb weniger Minuten sowohl die Polhöhe als auch die Zeit mit ungemeiner Schärfe bestimmen läßt. Hierzu wird nichts weiter erfordert, als die Höhe zweier Sterne, deren Position bekannt ist, zu messen, und die Zeit der Messungen, welche die Uhr angiebt, zu bemerken: der tägliche Gang der Uhr braucht nur so weit bekannt zu seyn, daß sich daraus die Zwischenzeit der Beobachtungen mit Genauigkeit in Sternzeit verwandeln läßt.

Ohnstreitig ist dieses Problem eins der nützlichsten in der nautischen Astronomie, und es ist daher zu verwundern, daß kein einziger von den Schriftstellern, die diese Wissenschaft vorgetragen haben, sich über dasselbe ausläßt. Zwar lehrt Herr Kraft, (*Act. nov. Acad. Petrop. T. XIII.*) aus zweier Sterne Höhen die Polhöhe zu bestimmen: aber sonderbar genug schränkt er dieses allgemeine Problem durch die specielle Bedingung ein, daß beide Höhen in einem und demselben Momente gemessen werden sollen. Dadurch werden also nothwendig zwei Beobachter, zwei Messwerkzeuge und zugleich die genaueste Uebereinstimmung in den Beobachtungen erfordert, Voraussetzungen, denen nicht so leicht ein Genüge geleistet werden kann. Ueberdies ist aber auch diese Bedingung ganz überflüssig, indem jedes wohl ausgerüstete Schiff doch gewiß mit einer Uhr versehen seyn wird, auf deren Gang man sich innerhalb weniger Minuten verlassen kann, auch das Schiff in so kurzer Zeit seinen geographischen Ort nicht merklich verändert,

I 2

und

132 Sammlung astronomischer Abhandlungen,

und endlich die ganze Aufgabe durch jene Bedingung, in Rücksicht der Rechnung um nichts vereinfacht wird.

3.

Es läßt sich leicht zeigen, daß das Problem, wie es Hr. Kraft abgehandelt hat, auch so ausgedrückt werden könne: „Aus der gegebenen Lage zweier Punkte auf der Kugeloberfläche in Beziehung auf einen grössten Kreis (der hier der Aequator ist) die Lage eines dritten Punkts zu finden, dessen Abstände von jenen Punkten gegeben sind.“ Die ersten beiden Punkte giebt nemlich die Position der beiden an der Himmelskugel beobachteten Sterne, deren gerade Aufsteigung und Abweichung als bekannt voraus gesetzt wird; der dritte Punkt ist das Zenith des Beobachtungsorts, dessen Declination der Polhöhe gleich ist, und dessen gerade Aufsteigung der kulminirende Punkt des Aequators, folglich auch zugleich die Sternzeit bestimmt. Hiernach beruhet also diese Aufgabe auf der Auflösung dreier sphärischer Dreiecke; das erste liegt zwischen den beiden gegebenen Punkten und dem Pole des Aequators, worin zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, und wodurch die dritte Seite und einer der beiden übrigen Winkel gefunden werden. Das zweite Dreieck schliessen jene beiden gegebenen und der gesuchte Punkt ein: in diesem sind bereits alle drei Seiten bekannt, und es wird daraus ein Winkel abgeleitet, und zwar entweder der am ersten, oder der am zweiten Punkte, je nachdem man in dem ersten Dreiecke als gesuchten Winkel den am ersten, oder den am zweiten Punkte gewählt hatte. Die Summe oder Differenz dieser beiden Winkel bestimmt einen Winkel im 3ten Dreiecke, welches der erste und dritte Punkt und der Pol des Aequators einschliessen, und worin aufser jenem Winkel noch zwei Seiten bekannt sind. Hieraus findet sich demnach noch der Winkel am Pole und des dritten Punktes Abstand vom Pole (welcher dem Complementary der Polhöhe gleich ist.)

Schon im 16. Jahrhunderte machten die Astronomen von dieser Aufgabe Gebrauch, s. unter andern *Tychonis Astron.*

Astron. instaur. progym. P. 221. etc. wo die Position vieler Sterne aus dem Abstände von zwei bekannten Sternen bestimmt wird.

Man sieht zugleich leicht aus obiger Darstellung, daß dieses Problem jedesmal zwei Auflösungen zuläßt: denn zieht man aus zwei gegebenen Punkten der Kugelfläche mit den Halbmessern, die den gegebenen Abständen derselben gleich sind, zwei Kreise, so werden sich diese jedesmal in zwei Punkten schneiden, in deren jedem der gesuchte Punkt liegen kann. Hieraus kann jedoch bei der Anwendung keine Zweideutigkeit entstehen: denn gedenkt man sich durch den ersten und zweiten Punkt einen größten Kreis gelegt, der also der Kugel Oberfläche in zwei Halbkugeln theilt, so kann weiter kein Zweifel obwalten, ob der dritte Punkt (das Zenith) und der Nordpol in der nehmlichen Halbkugel oder in verschiedenen liegen, und es ist klar, daß der erste Fall statt finden müsse, wenn der Ueberschuß der geraden Aufsteigung desjenigen Sterns, welcher dem andern zur linken beobachtet wurde, über die gerade Aufsteigung des andern Sterns (nachdem erstere *AR* nöthigenfalls um 360° vermehrt ist) zwischen 0° und 180° fällt, der zweite Fall hingegen eintritt, wenn derselbe Ueberschuß zwischen 180° und 360° fällt.

Uebrigens ist gerade diese in der Natur der Sache liegende Zweideutigkeit des Problems als die Ursache der etwas weilläufigen Rechnungen anzusehen, auf welche die directe Auflösung desselben führt: es soll aber weiter unten gezeigt werden, wie diese sich merklich abkürzen läßt. Will man aber lieber eine indirecte Auflösung vorziehen, so läßt sich diese ungemein geschmeidig machen, wie ich bei einer andern Gelegenheit zeigen werde.

Das bisher gesagte bezieht sich auf den besondern Fall, wenn beide Beobachtungen gleichzeitig sind; allgemein aber läßt es sich folgendermaassen darstellen: anstatt des zweiten beobachteten Sterns denke man sich einen Punkt an der Himmelskugel, der mit diesem zweiten Stern einerlei Abweichung, hingegen eine um so viel geringere *AR* habe, als die Sternzeit beträgt, die zwischen beiden Beob-

achtungen verflossen ist. Es ist klar, daß dieser eingebildete Stern zur Zeit der ersten Beobachtung dieselbe Höhe erreicht haben würde, die der wirklich beobachtete Stern im Augenblicke der zweiten Beobachtung hatte. Hieraus ergiebt sich also, daß man, wenn man den eingebildeten Stern für den wirklichen setzt, die Rechnung auf den Fall der gleichzeitigen Beobachtung zurück geführt sey. Dieses alles beruhet auf rein geometrischen, freilich ganz einfachen Betrachtungen: es wird aber ohne Zweifel manchem angenehm seyn, eine directe Auflösung dieses Problems auf bloß analytischem Wege entwickelt zu sehen, wodurch sich aufs neue bestätigen wird, daß alle Wahrheiten, welche aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet werden, eben so zierlich mit Hülfe der Analyse entdeckt werden können, wenn diese nur auf die rechte Art behandelt wird.

4.

Es sey ϕ die Polhöhe, α und α' die gerade Aufsteigung, δ und δ' die Declination der beiden Sterne, γ und γ' die gerade Aufsteig der kulminirenden Punkte des Aequators im Augenblicke der ersten und zweiten Beobachtung, oder welches einerlei ist, die in Grade verwandelten Sternzeiten selbst; h die beobachtete Höhe des ersten, h' die des zweiten Sterns *), woraus also folgt, daß $\gamma - \alpha$ und $\gamma' - \alpha'$ die den beiden Beobachtungen zugehörigen Stundenwinkel sind. Man setze ferner $\gamma - \alpha = \lambda$; $\gamma' - \alpha' = \lambda' - \theta$, woraus $\theta = \alpha' - \alpha - (\gamma' - \gamma)$ und folglich bekannt ist, weil $\gamma' - \gamma$ die in Grade verwandelte Sternzeit zwischen beiden Beobachtungen ist.

*) In der monatl. Correspondenz Febr. 1809. woselbst sich ein kurzer Auszug aus dieser Abhandlung befindet, ist dieses Problem so vorgestellt, als würden dazu gleiche Höhen der Sterne erfordert. Daß dies aber durchaus nicht der Fall sey, ergiebt sich schon aus der verschiedenen Bezeichnung, die der Hr. Verfasser beiden Höhen gegeben hat. Uebrigens würde diese Methode durch eine solche Forderung auch vieles von ihrer Bequemlichkeit und Brauchbarkeit verlieren.

H.

ist. Hiernach beruhet also die Auflösung dieses Problems auf die Entwicklung folgender beiden Gleichungen:

$$1) \sin h = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \lambda$$

$$2) \sin h' = \sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos (\lambda - \theta).$$

Die Eliminirung einer der beiden unbekannten Grössen λ oder φ würde auf eine sehr verwickelte Gleichung führen; Herr Kraft hat in der oben angeführten Dissertation diesen Weg gewählt, aber seine Auflösung ist meiner Meinung nach ungleich weitläufiger und mühsamer als diejenige, welche unmittelbar aus der Betrachtung dreier Dreiecke hervorgeht, obgleich sie sich bloß auf die Bestimmung von φ einschränkt, und sich auf die Bestimmung der Zeit nicht einläßt. Es ist daher besser, beide φ und λ mit Hülfe einer neuen unbekannten Grösse zu eliminiren: zu deren schicklichen Wahl folgende Bemerkung den Weg vorzeichnet. Es ist nemlich offenbar

$$(\sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos \lambda)^2 + (\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos \lambda)^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda = 1 - \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda$$

und daher zufolge der Gleichung 1)

$$\frac{(\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos \lambda)^2}{\cos^2 h} + \frac{(\cos \varphi \sin \lambda)^2}{\cos^2 h} = 1.$$

Man kann daher setzen

$$3) \frac{\cos \delta \sin \varphi - \sin \delta \cos \varphi \cos \lambda}{\cos h} = \cos u$$

$$4) \frac{\cos \varphi \sin \lambda}{\cos h} = \sin u$$

Verbindet man nun die Gleichungen 3 und 4, so folgt

$$5) \sin \varphi = \sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos u$$

$$6) \cos \varphi \cos \lambda = \cos \delta \sin h - \sin \delta \cos h \cos u.$$

Man gebe ferner der Gleichung 2 folgende Gestalt

$\sin h' = \sin \delta' \sin \varphi + \cos \delta' \cos \varphi \cos \lambda + \sin \theta \cos \delta' \cos \varphi \sin \lambda$
und setze für $\sin \varphi$; $\cos \varphi \cos \lambda$; $\cos \varphi \sin \lambda$; ihre Werthe aus 5, 6, 4, so findet sich

$$\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \theta \cos \delta \cos \delta' - \cos u \cos h \cos \delta \sin \delta' + \cos u \cos h \cos \theta \sin \delta \cos \delta' + \sin u \cos h \sin \theta \cos \delta' = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man setzt

$$7) \frac{\cos \delta \sin \delta' - \cos \theta \sin \delta \cos \delta'}{\sin \theta \cos \delta'} = \cotang \nu$$

136 Sammlung astronomischer Abhandlungen,

in folgende

$$\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \theta \cos \delta \cos \delta' - \cos h \sin \theta \cos \delta' \\ (\cos u \cotang v + \sin u) = 0.$$

Macht man ferner $v - u = w$, so hat man

$$8) \cos w = \frac{\sin v (\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \theta \cos \delta \cos \delta')}{\cos h \sin \theta \cos \delta'}$$

woraus also w , und auch $u = v - w$ bekannt wird.

Nachdem der Winkel u gefunden worden ist, lässt sich nun auch λ aus der Verbindung der Gleichungen 4 und 6 leicht herleiten, woraus sich ergibt

$$9) \tan \lambda = \frac{\cos \delta \sin h - \sin \delta \cos h \cos u}{\cos h \sin u}$$

Ist aber λ bekannt, so ergibt sich auch $\gamma = \alpha + \lambda$, und wenn man diesen Winkel in Zeit verwandelt, so hat man den Stand der Uhr. Aus der Verbindung der Gleichungen 4 und 5 endlich ergibt sich

$$10) \tan \phi = \frac{\sin \lambda (\sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos u)}{\cos h \sin u}$$

Mit dieser Formel kann man noch die Gleichung 4 verbinden, so hat man zugleich eine Controle, wodurch die Richtigkeit der Rechnung geprüft wird.

5.

Ueber die im voranstehenden Artikel gelehrt Auflösung bemerke ich noch folgendes: Da der Winkel w nach der Formel 8 durch den Cosinus gefunden wird, so sind für ihn zwei Werthe, ein positiver und ein negativer, möglich, und die Aufgabe lässt mithin eine doppelte Auflösung zu, wie bereits oben bemerkt worden ist: es lässt sich aber auf folgende Art leicht entscheiden, welcher von beiden Werthen in jedem vorkommenden Falle der wahre ist. Eine leichte Betrachtung ergibt nemlich, daß der Sinus vom Ueberschuss des Azimuths des ersten Sterns über das Azimuth des zweiten Sterns von der linken zur rechten Hand gezählt, $= \frac{\sin \theta \cos \delta' \sin w}{\cos h' \sin v}$ seyn werde. Hieraus folgt, so gleich, daß, weil $\cos \delta'$ und $\cos h'$ ihrer Natur nach po-

si-

sitive Gröſſen sind, auch $\frac{\sin w}{\sin v}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben müsse, je nachdem der durch den ersten Stern gehende Vertikalkreis von dem, der durch den zweiten Stern geht, zur rechten oder zur linken Hand liegt. Ueber diesen Fall aber kann niemahls ein Zweifel entstehen, indem solche Sterne, deren Vertikalkreise entweder nahe zusammen fallen, oder beinahe eine entgegengesetzte Lage haben, zu diesen Beobachtungen nicht brauchbar sind, und deswegen sorgfältig vermieden werden müssen, wie weiter unten noch mehr aus einander gesetzt werden soll.

Uebrigens läßt sich die vorhin gegebene Auflösung auch noch etwas abkürzen, und für die numerische Entwicklung durch Einführung zweier Hülſswinkel bequemer einrichten. Setzt man nemlich

11) $\tan F = \frac{\tan \delta'}{\cos \theta}$, so verwandelt sich die Gleichung 7 und 8 in folgende

12) $\tan v = \frac{\cos F \tan \theta}{\sin(F - \delta)}$

13) $\cos w = \frac{\cos v \tan h}{\tan(F - \delta)} \left(\frac{\sin h' \sin F}{\sin h \sin \delta' \cos(F - \delta)} - 1 \right)$

Ferner nenne man einen zweiten Hülſswinkel G , und mache

14) $\tan G = \frac{\tan h}{\cos u}$, so verwandeln sich die Gleichungen 9 und 10 in die folgenden

15) $\tan \lambda = \frac{\cos G \tan u}{\sin(G - \delta)}$

16) $\tan \phi = \cos \lambda \cotang(G - \delta)$.

6.

Die practischen Astronomen pflegen sich nicht selten zu beschweren, daß die von den Theoretikern vorgeschlagenen Methoden zur wirklichen Anwendung nicht immer ganz geeignet seyen, oder wenigstens nicht vollkommen
lei-

leisten, was sie sich von ihnen versprochen. Dafs dieser Vorwurf die hier vorgetragene Methode nicht treffe, wird das folgende Beispiel hinlänglich darthun, wozu ich die Data aus wirklich angestellten Beobachtungen entlehne. Mit einem *Troughton'schen* Sextanten von 10 Zoll fand ich am 21. Aug. 1808. die doppelte unverbesserte Höhe von α im Adler $91^{\circ}34'10''$, als die *Shelton'sche* Uhr $20^h40'8''$ zeigte. Eben diese Höhe hatte α in der Andromeda um $20^h46'59''$; der durch den ersten Stern liegende Vertikalkreis war zur rechten, der des zweiten aber zur linken Hand. Der tägliche Gang der Uhr kam vollkommen mit der Sternzeit überein. Der von des Zeigers Irthum befreite Winkel ergab sich zu $91^{\circ}31'36''$, woraus die scheinbare Höhe $45^{\circ}45'48''$, und mithin die wahre Höhe $h = h', 45^{\circ}44'52'',6$ folgt. Die scheinbare Position jener beiden Sterne fand sich

$$\alpha = 295^{\circ}22'6'',6 \quad \delta = +8^{\circ}22'43'',1$$

$$\alpha' = 359^{\circ}38'18,5 \quad \delta' = +28^{\circ}2'13,4$$

Der Unterschied der Beobachtungszeiten $6^h51''$ in Bogentheile verwandelt, giebt $\gamma' - \gamma = 1^{\circ}42'45''$, und daher $\theta = 62^{\circ}33'26'',9$. Wegen der hier vorkommenden gleichen

Höhe der Sterne fällt der Factor $\frac{\sin h'}{\sin h}$ in Form. 13. weg,

und die Rechnung steht demnach so:

$$\log \tan \delta' \dots\dots 9.7263516$$

$$\log \cos \theta \dots\dots 9.6635677$$

$$\log \tan \delta' \dots\dots 0.0627839, \text{ also } F = 49^{\circ}7'37'',70, \text{ und } F - \delta = 40^{\circ}44'54'',60.$$

$$\log \tan \theta \dots\dots 0.2845877$$

$$\log \cos F \dots\dots 9.8158318$$

$$\text{compl. lg sin } F - \delta \dots\dots 0.1852598$$

$$\log \tan \alpha \dots\dots 0.2856793. \text{ Daher } \alpha = 62^{\circ}36'58'',79.$$

$$\log \sin F \dots\dots 9.8786157$$

$$\text{compl. lg sin } \delta' \dots\dots 0.3278629$$

$$\text{compl. lg cos } F - \delta \dots\dots 0.1205703$$

$$0.3270489 = \log 2.123483 = \log n.$$

log

$\log z$	0.05666
$\log \cos$	9.6627075
$\log \tan h$	0.0113399
$\log \cot g F - \delta$	0.0646895
$\log \cos w$	9.7893035
mithin $w = +52^{\circ} 0' 14'' .25$	
und $u = 10^{\circ} 36' 44'' .54$	
$\log \tan h$	0.0113399
$\log \cos u$	9.9925074
$\log \tan G$	0.0188325
folglich $G = 46^{\circ} 14' 30'' .77$	
und $G - \delta = 37^{\circ} 51' 47'' .67$	
$\log \cos G$	9.8398647
$\log \tan u$	9.2726964
$\text{compl. } \log \sin G - \delta$	0.2119881
$\log \tan \lambda$	9.3245492
daher $\lambda = 11^{\circ} 55' 18'' .31$	
$\log \cos \lambda$	9.9905300
$\log \cot g G - \delta$	0.1093281
$\log \tan \phi$	0.0998581
also $\phi = 51^{\circ} 31' 47'' .19$	

Die hier gefundene Polhöhe weicht nur um wenige Sekunden von der wahren ab. Aus λ ergibt sich ferner $\gamma = 307^{\circ} 17' 24'' .91$ oder in Zeit $20^h 29' 9'' .66$ und damit die Voreilung der Uhr vor Sternzeit $= +10^{\circ} 58' 34'' .34$ welches bis auf ein Paar Zehnthelle einer Sekunde mit dem übereinstimmt, was andere Beobachtungen von demselbigen Abend gaben.

Z.

Der Vollständigkeit wegen muß ich nun noch zeigen, welchen Einfluß die kleinen nicht zu vermeidenden Beobachtungsfehler bei den Höhenmessungen auf die Bestimmung der unbekannten Größen habe, woraus zugleich die Regeln hervor gehen werden, nach denen man die Sterne auszuwählen hat, welche die genauesten Resultate geben können. Man nehme hierbei die Höhen h und h' , imgleichen die Größen ϕ und λ als veränderlich an, und differenziere die Gleichung 1, so wird sie

$$\cos h' d h = (\sin \delta \cos \phi - \cos \delta \sin \phi \cos \lambda) d \phi - \cos \delta \cos \phi \sin \lambda d \lambda$$

Nennet

140 Sammlung astronomischer Abhandlungen,

Nennet man nun A das Azimuth des Vertikalkreises, in welchem der erste Stern beobachtet ward, *) so erhält man

$$\sin \delta \cos \varphi - \cos \delta \sin \varphi \cos \lambda = -\cos h \cos A$$

$$\cos \delta \sin \lambda = \cos h \sin A$$

und es verwandelt sich die vorige Gleichung in die folgende

$$17) d h = -\cos A d \varphi - \cos \varphi \sin A d \lambda$$

Völlig auf diese Weise erhält man durch die Differentiation der Gleichung 2. wenn auf ähnliche Art das Azimuth des zweiten beobachteten Sterns $= A'$ gesetzt wird.

$$18) d h' = -\cos A' d \varphi - \cos \varphi \sin A' d \lambda$$

und es ergeben sich aus der Verbindung dieser Gleichungen nachstehende beide

$$19) d \varphi = -\frac{\sin A'}{\sin(A'-A)} d h + \frac{\sin A}{\sin(A'-A)} d h'$$

$$20) \cos \varphi d \lambda = \frac{\cos A'}{\sin(A'-A)} d h - \frac{\cos A}{\sin(A'-A)} d h'$$

Man sieht hieraus, daß aus geringen Fehlern bei den beobachteten Höhen sowohl in der Bestimmung der Polhöhe als auch der Zeit sehr bedeutende Fehler entstehen können, wenn $\sin(A'-A)$ sehr klein ist, d. h. wenn der Vertikalkreis des zweiten Sterns dem des ersten sehr nahe, oder fast gegenüber liegt, woraus also die Regel folgt, daß man bei dieser Beobachtungsmethode keine Sterne nehmen dürfe, die eine solche Lage gegen einander haben. Ist hingegen $\sin(A'-A)$ eine beträchtliche positive oder negative GröÙe, so werden sich die Beobachtungsfehler in der Bestimmung der Polhöhe eben nicht sehr vergrößert zeigen können. Eben dies gilt auch von der Bestimmung der Zeit: zwar hängt die Genauigkeit derselben auch mit von der Polhöhe selbst ab, allein dies liegt in der Sache selbst, und fällt keinesweges dieser Methode zur Last, indem, wie bekannt, unter großen geographischen Breiten sich die Zeit nie mit so großer Präcision bestimmen läßt, als es in der Nähe

*) Ich setze voraus, daß das Azimuth vom Südpuncte an rechter Hand durch Westen, Norden etc. durch alle 360° fortgezählt werde.

Nähe des Aequators möglich ist. — Am besten wird es immer seyn, zu diesen Beobachtungen die Sterne so zu wählen, daß $A'-A$, oder $A-A'$ nicht viel von 90° verschieden sey, d. h. daß die durch sie gehenden Vertikalkreise sich beinahe unter rechten Winkeln schneiden. In diesem Falle wird der größte Werth von $d\phi = \sqrt{(dh^2 - d h'^2)}$, und der größte Werth von $d\lambda = \sqrt{\frac{(dh^2 + d h'^2)}{\cos \phi}}$. Wäre also jede der gemessenen Höhen bis auf $10''$ genau, so würde der größte Fehler in der Breitenbestimmung $= 14''$, und der größte Irthum in der Bestimmung des Winkels λ , $\frac{14''}{\cos \phi}$ seyn, welches mithin unter der hiesigen Polhöhe die größte Ungewißheit in der Zeitbestimmung $1'',5$ macht. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daß hiebei bloß auf die Folgen der Beobachtungsfehler gesehen sey, denn die Position der hellsten Fixsterne ist gegenwärtig so genau bekannt, daß man die Fehler dieser Bestimmungen ganz bei Seite setzen kann.

Zu vorstehender Uebersetzung hat der Hr. Verf. selbst noch folgende zwei Anmerkungen hinzugefügt:

I. Da bei der Gleichung 9 oder 15 die Bestimmung des Winkels λ durch seine Tangente es an sich unentschieden läßt, ob dieser Winkel im ersten oder im zweiten Halbkreise genommen werden müsse, so erfordert die analytische Vollständigkeit, hierüber eine allgemeine Regel zu geben. Es dient dazu die Gleichung 4, aus welcher klar ist, weil $\cos \phi$ und $\cos h$ ihrer Natur nach positive Größen sind, daß $\sin \lambda$ und $\sin u$ einerlei Zeichen haben müssen: man wird demnach λ immer in eben dem Halbkreise nehmen, in welchem u liegt.

II. Eben diese Gleichung 4 ist am Ende des vierten Artikels zur Controlle empfohlen: man muß aber bemerken, daß durch dieselbe nur die richtige Berechnung der Formeln 9 und 10, oder 14, 15 und 16 bestätigt werden kann,

142 Sammlung astronomischer Abhandlungen,

kann, und dieselbe also nicht tauglich ist, etwa früher begangene Fehler zu entdecken.

Da der Herr Verf. die voranstehende Methode durch ein Beispiel erläutert hat, worin die gemessenen Höhen der Sterne *gleich* sind, dieses aber keinesweges eine nothwendige Forderung ist, so dürfte es vielleicht einigen Lesern angenehm seyn, hier auch ein Beispiel zu finden, wo *ungleiche* Sternhöhen vorkommen, und die Anwendung der

Formel 13 auch mit dem Factor $\frac{\sin h'}{\sin h}$ gezeigt wird. Zu diesem Zwecke sey es mir erlaubt, hier die Beobachtungen anzuführen, welche ich am 17ten May d. J. mit einem 5 zölligen Troughton'schen Sextanten zu erhalten Gelegenheit nahm. Ich fand nemlich nach der Shelton'schen Uhr um $16^h 8^m 25^s$ die doppelte unverbesserte Höhe α Bootis = $100^\circ 10' 0''$, und um $16^h 37^m 49^s$ die von α Aquilae = $67^\circ 10' 0''$. Der Collimationsfehler des Sext. fand sich $+1' 5''$ und damit die durch Refraction verbesserten einfachen wahren Höhen $h = 50^\circ 3' 38''.7$, $h' = 33^\circ 33' 0''.0$. Die scheinbare Position beider Sterne, war zufolge der Tafeln

$$\alpha = 211^\circ 44' 54''.88 \quad \delta = 20^\circ 10' 56''.02$$

$$\alpha' = 295^\circ 22' 17''.50 \quad \delta' = 8^\circ 22' 35''.45$$

ferner ergibt sich $\gamma' - \gamma = 0^h 29^m 24^s = 7^\circ 21' 0''$, und $\theta = 76^\circ 16' 22''.62$

$$\log \tan \delta' \dots\dots\dots 9.1680504$$

$$\log \cos \theta \dots\dots\dots 9.3752919$$

$$\log \tan F \dots\dots\dots 9.7927585 = 31^\circ 49' 14''.13; F - \delta = 11^\circ 38' 18''.11$$

$$\log \tan \theta \dots\dots\dots 0.6121228$$

$$\log \cos F \dots\dots\dots 9.9292673$$

$$\text{compl. lg sin}(F - \delta) 0.6952214$$

$$\log \tan \gamma' \dots\dots\dots 1.2366115 = 86^\circ 40' 51''.11$$

$$\log \sin F \dots\dots\dots 9.7220258$$

$$\text{compl. log sin } \delta' \dots\dots\dots 0.8366075$$

$$\text{compl. log cos}(F - \delta) 0.0090219$$

$$\log \sin h' \dots\dots\dots 9.7424616$$

$$\text{compl. log sin } h \dots\dots\dots 0.1153600$$

$$\log n \dots\dots\dots 0.4254768 = 2.6636480$$

log n

$\log n - 1$		0.2210614	
$\log \cos v$		8.7626595	
$\log \tan h$		0.0771218	
$\log \cotg (F - \delta)$		0.6861994	
$\log \cos w$		9.7470421	$= 56^\circ 2' 46'', 29; v - w = 30^\circ 38' 4'', 82 = "$
$\log \tan h$		0.0771218	
$\log \cos u$		9.9347175	
$\log \tan G$		0.1424043	$= 54^\circ 13' 46'', 73; G - \delta = 34^\circ 2' 50'', 71$
$\log \cos G$		9.7668127	
$\log \tan u$		9.7724798	
compl. $\log \sin (G - \delta)$		0.2519051	
$\log \tan \lambda$		9.7911984	$= 31^\circ 43' 42'', 45$
			$= 211 \quad 44 \quad 54 \quad ,88$
			$243^\circ 28' 37'', 33$
			in Zeit $= 16^h 13' 54'', 49$
			die Uhr zeigte $= 16 \quad 8 \quad 25$
			Verspät. der Uhr $= 5' 29'', 49$ gegen Sternzeit.
$\log \cos \lambda$		9.9296999	
$\log \cotg (G - \delta)$		0.1702375	
$\log \tan \phi$		0.0999374	
ϕ		$51^\circ 32' 5'', 53$	

Eine zweite Messung eben dieser beiden Sterne gab für $\phi = 51^\circ 32' 5'', 02$ und den Stand der Uhr $- 5' 29'', 43$, ganz übereinstimmend mit dem, was Beobachtungen am Mauerquadranten in derselbigen Nacht gaben.

Sternbedeckungen vom Monde.

1808. Jan. 3. α Pisc. Eintritt am dunkeln C Rande $9^h 52' 35'', 8$ M. Z.
 Aug. 10. β Pisc. Austr. am dunkeln C Rande $13^h 18' 56'', 1$ M. Z.

24 Trab. Verfinsterungen.

Mittl. $\odot$ Zeit.

1808. Aug. 17. Eintritt III. $11^h 5' 26'', 1$ 4 f. Dollond. H.
 — 21. Eintritt I. $12 \quad 13 \quad 31 \quad ,4$ 3 $\frac{1}{2}$ f. Dollond. H.
 Nov. 8. Austritt II. $6 \quad 16 \quad 7 \quad ,8$ — — — H.
 — 16. Austritt I. $7 \quad 59 \quad 57 \quad ,1$ — — — H.
 Dec. 18. Austritt I. $4 \quad 42 \quad 47 \quad ,7$ 10 f. Reff. G.